数理解析研究所講究録
273巻 1976年 54-62

A generalization of Magnus' Theorem

阪大理　中井喜和

$f(x,y)$, $g(x,y)$ を整係数の2変数多項式とする．もしその関数行列式 $\partial(f,g)/\partial(x,y)$ の値が 1 であるなら，x,y が逆に f,g の整係数多項式として表わせるかという問題がある．これは1939年 O.H. Keller([ ]) によって提出されたものである．爾来多くの人が係数環を複素数体まで許すことにして，その証明を試みたが，未だ完全な証明は発見されていない．一方 A. Magnus は [ ] において，別の観点よりこの問題をとりあげ，f,g の次数 m,n が何れも1より大きいときは，m と n とは必ず共通因子を持つことを証明した．この結果より，m,n 何れか一方が素数であれば Keller の予想は正しいことが証明される．然し Magnus の証明に使用する漸化式は複雑でその導出は面倒である．本稿では，Magnus の定理の簡単な別証明と，それをやゝ一般化した結果を紹介する．その結果の Keller の予想に対する貢献は多くはないが，その完全な解決にいた

るまでの一里塚としての意義は認めて頂けるものと思う.

1. 擬斉次多項式 $f(x, y)$ を複素係数の2変数多項式とするとき, $S(f)$ で f の台, すなわち $f(x,y)=\sum a_{ij}x^iy^j$ とするとき $a_{ij}\neq 0$ である様な格子点 (i, j) の集合を表わすことにする. $S(f)$ が R^2 の一つの直線に含まれているとき, f を擬斉次多項式とよぶ. とくにその方程式が $Y+\alpha X=\lambda$ とかける直線に $S(f)$ が含まれるとき, f を (α)-斉次といい, λ をその次数(あるいは α-次数)とよぶ. 単に斉次多項式というときは通常の意味の斉次, すなわち我々の定義によれば, (1)-斉次多項式のことをいうこととしよう. さて α を任意の実数とし A_λ で次数が λ である (α)-斉次多項式の集合とすると, $A=\mathbb{C}[x, y]$ は $A=\oplus A_\lambda$ とかけ, これによって次数づきの環になる. このような次数づけを α-grading とよぶことにしよう. 擬斉次多項式の概念が Keller の問題とかかわりをもつのは次の2つの補題による. 証明は易しいから省く.

補題 1. $f(x, y)$, $g(x, y)$ を (α)-斉次多項式とし, その次数を夫々 $\lambda(>0)$, $\mu(>0)$ とする. 且つ関数行列式 $\partial(f, g)/\partial(x, y)=0$ と仮定する. このとき次のことが成りたつ.

(i) $f(x,y)=cx^iy^j$, $g(x,y)=dx^ky^l$ が共に単項式であれば

$il-jk=0$ でなければならない.

(ii) α が無理数であれば, f, g は共に単項式でなければならない.

(iii) α が有理数で, $\alpha=q/p$ とする. ただし $p>0$ で p と q は互に素な整数とする. いま $GCD(p\lambda, p\mu)=d$, $m'=p\lambda/d$, $n'=p\mu/d$ とすると, (α)-斉次多項式 h で, $f=\varepsilon_1 h^{m'}$, $g=\varepsilon_2 h^{n'}$ となるようなものが存在する.

補題2. $f(x,y)$, $g(x,y)$ を2変数多項式で $\partial(f,g)/\partial(x,y)$ が定数(必ずしも0でないことを要求しない)であるようなものとする. α を任意の実数, $f=\oplus f_\lambda$, $g=\oplus g_\mu$ をそれぞれ α-grading による直和分解とすると

$$\sum_{\lambda+\mu=s}\frac{\partial(f_\lambda, g_\mu)}{\partial(x,y)}=0$$

が成りたつ. 但し $s\neq 1+\alpha$ なる実数で, 和は $\lambda+\mu=s$ となる凡ての実数の組 (λ,μ) にわたるものとする.

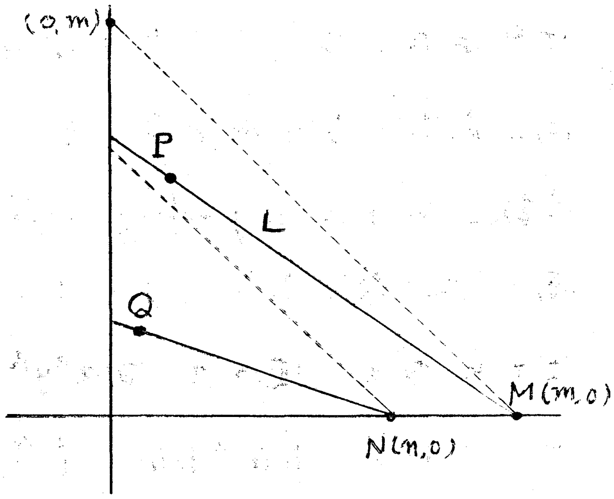
2. Magnus の定理. Magnus の定理の元の形とは異るが本質的には同一である次の定理を証明する.

定理 1. $f(x,y)$, $g(x,y)$ を複素係数の多項式とし, そ

の次数をそれぞれ m および n とする。また関数行列式 $\partial(f,g)/\partial(x,y)$ は 0 でない定数と仮定する。そのとき次の事が成りたつ。

(M_1): $\mathrm{Min}(m,n) > 1$ であれば $\mathrm{GCD}(m,n) > 1$ である。

証明　f_m, g_n をそれぞれ f, g の m 次, n 次の斉次部分とすると $\partial(f_m, g_n)/\partial(x,y) = 0$ となるから(補題 2), 補題 1 より, $\mathrm{GCD}(m,n)=1$ とすると $f_m = \varepsilon_1 l^m$, $g_n = \varepsilon_2 l^n$ となるような一次式 l および定数 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ が存在する。一般性を失なうことなく $l = x$, $\varepsilon_1 = 1$ と仮定してよい。$M = (m, 0)$, $N = (n, 0)$ とおく。次に $S(f)$ の点より次の条件をみたす点 P をとりだす。点 M を中心として, M を通る直線 $X + Y = m$ を時計の針と逆の方向に回転し, はじめて $S(f)$ の点をとおる位置まで移動しそこで止める。その直線をたとえば L とする。L 上にある $S(f)$ の点の中, X-座標の最小のものを P とする。点 P の座標を (p_1, p_2) とする。同様な方法で $S(g)$ の点 $Q=(q_1, q_2)$ を撰定する。はじめに P あるいは Q の何れかは X-軸上にないと仮定する。すなわち, たとえば $p_2 > 0$ と仮定する。そのときには



(1)　$MP \nparallel NQ$　であるか

(2)　$OP \nparallel OQ$

の何れかが成りたつ. 何となれば, もし(1), (2)の何れも成立しないとすれば $p_2/m-p_1 = q_2/n-q_1$, $p_1q_2 = p_2q_1$ の何れも成立つ. したがって $p_2n = q_2m$. 仮定により $p_2>0$ であるから q_2 も >0. また仮定より $(n,m)=1$ であるから $m|p_2$, $n|q_2$ でなければならない. これは $m>p_2>0$ に矛盾する. さていま(1)がなりたつとし, 直線 MP, NQ の方程式をそれぞれ $Y+aX=am$, $Y+bX=bn$ とすると仮定より $a\neq b$ である. いま $a>b$ とし, $a>\gamma>b$ をみたす実数を γ とし, γ-grading を考えると, $S(g)$ の中では, x^n が最大の γ-grade をもつ. またさらに γ を十分 a に近くとれば, 点Pに対応する f の項 ~~[illegible]~~ すなわち $x^{p_1}y^{p_2}$ が最大の γ-grade をもつことになる. 従って補題2より $\partial(x^n, x^{p_1}y^{p_2})/\partial(x,y) = np_2 = 0$ でなければならない. これは矛盾である. 次に(1)を否定すると, (2)が成立しなければならない. このときは a より少し小さい実数 γ による γ-grading を考えると, f の中では $x^{p_1}y^{p_2}$ が最高の γ-次数をもち, g の中では $x^{q_1}y^{q_2}$ が最高の γ-次数をもつことになる. 従って $\partial(x^{p_1}y^{p_2}, x^{q_1}y^{q_2})=0$ でなければならないが, これは $p_1q_2 \neq p_1q_2$ と矛盾する. このように(1), (2)何れと仮定しても矛盾が生ずる. ゆえに P, Q 共に X-軸上に存在しなければならないことになる. P, Q の撰定方法より, これは f, g 共に x だけの多項式であることを意味する. 従って

$\partial(f,g)/\partial(x,y)=0$ でなければならない。これは定理の大前提 $\partial(f,g)/\partial(x,y)\in\mathbb{C}^*$ に矛盾する。ゆえに $GCD(m,n)>1$ である。

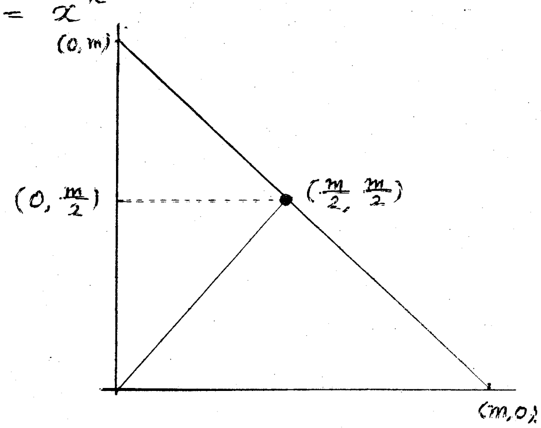
3. 定理2. $f(x,y)$, $g(x,y)$ は定理1におけると同様とする。このとき次の事実が成立する。

M_2: もし $Min(m,n)>2$ であれば $GCD(m,n)>2$ である。

証明 $Min(m,n)>2$ で $GCD(m,n)=2$ とする。すると同様の考察により次の2つの場合にわけられることが直ちにわかる。

(I) $f_m(x,y)=(xy)^{\frac{m}{2}}$, $g_n(x,y)=(xy)^{\frac{n}{2}}$

(II) $f_m(x,y)=x^m$, $g_n(x,y)=x^n$



(I)の場合、定理1の場合と同様にして $S(f)$, $S(g)$ もそれぞれ $Y\leq\frac{m}{2}$, $Y\leq\frac{n}{2}$ という領域に含まれていることがわかる。

そのとき (0)-grading を考えると

$$f=y^{\frac{m}{2}}(a_0+a_1x+\cdots+a_{\frac{m}{2}}x^{\frac{m}{2}})+(y\text{に関する次数}<\tfrac{m}{2}\text{の項})$$

$$g=y^{\frac{n}{2}}(b_0+b_1x+\cdots+b_{\frac{n}{2}}x^{\frac{n}{2}})+(\quad〃\quad<\tfrac{n}{2}\text{の項})$$

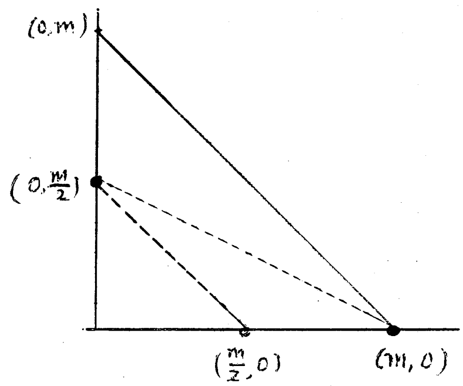
となり、更に補題1, 2より $(a_{\frac{m}{2}}=b_{\frac{n}{2}}=1)$

$$a_0+a_1x+\cdots+a_{\frac{m}{2}}x^{\frac{m}{2}}=(c+x)^{\frac{m}{2}},\quad b_0+b_1x+\cdots+b_{\frac{n}{2}}x^{\frac{n}{2}}=(c+x)^{\frac{n}{2}}$$

となる $c(\in\mathbb{C})$ が存在することが結論される。このとき、

$$x_1 = c + x,\quad y_1 = y$$

として変数変換を行ない、(x_1, y_1) に関する多項式とみると、f の台 $S_1(f)$ は $Y < \frac{m}{2}$ に後退し、g の台 $S_1(g)$ は $Y < \frac{n}{2}$ に後退する。そうするとまた定理1の証明に使用したのと同様の論法で $S_1(f)$ は $X \geq Y$ という半平面に、$S_1(g)$ も同じ様な半面に含まれなければならないことになる。即ち f, g の一次部分には y の項が存在しないことになる。これは明らかに $\partial(f,g)/\partial(x,y) \in \mathbb{C}^*$ に矛盾する。



(III)の場合　すでに何度もくり返した論法によって、f の台 $S(f)$ は半平面

$$Y + \frac{m}{2}X \leq \frac{m}{2}$$

に、g の台 $S(g)$ も $Y + \frac{n}{2}X \leq \frac{n}{2}$ に含まれていることがまずみられる。ついで $(\frac{1}{2})$-grading によって、f, g を整頓すればそれぞれ

$$f(x,y) = (ay + x^2)^{\frac{m}{2}} + \left((\tfrac{1}{2})\text{-次数} < \tfrac{m}{2}\ \text{の項}\right)$$

$$g(x,y) = (ay + x^2)^{\frac{n}{2}} + \left((\tfrac{1}{2})\text{-次数} < \tfrac{n}{2}\ \text{の項}\right)$$

このとき $a = 0$ なら、この論法をさらにおしすすめて、f, g 共に x だけの多項式であることが結論され矛盾に達する。$a \neq 0$ のときには次の Jonquière 変換

$$ay + x^2 = y_1,\quad x = x_1$$

を施す. $f_1(x_1,y_1)=f(x_1, a^{-1}(y_1-x_1^2))$, $g_1(x_1,y_1)=g(x_1,a^{-1}(y_1-x_1^2))$ とおくと $\partial(f_1,g_1)/\partial(x_1,y_1)=a^{-1}\partial(f,g)/\partial(x,y)$ である. 一方容易にたしかめられるように $S(f_1)$ は $Y+\frac{1}{2}X\leq\frac{m}{2}$ に, $S(g_1)$ は $Y+\frac{1}{2}X\leq\frac{n}{2}$ に含まれる. 再び定理1の証明に使用したのと同じ原理を適用すると実は $f_1(x_1,y_1)$ の次数は $\frac{m}{2}$ であり $g_1(x_1,y_1)$ の次数は $\frac{n}{2}$ に等しいことがたしかめられる. すなわち(II)の場合には定理1で否定された場合 $GCD(\frac{m}{2},\frac{n}{2})=1$, $Min(\frac{m}{2},\frac{n}{2})>1$ でしかも $\partial(f_1,g_1)/\partial(x_1,y_1)\in\mathbb{C}^*$ に帰着される. かくして(II)の場合もおこることはできない. すなわち $GCD(m,n)=2$ は矛盾を生ずるから $GCD(m,n)>2$ である.

4. Kellerの問題への応用

定理3 $f(x,y)$, $g(x,y)$ を次数がそれぞれ m, n の複素係数多項式で $\partial(f,g)/\partial(x,y)\in\mathbb{C}^*$ とする. もし m, n が次の条件の何れかをみたせば $\mathbb{C}[x,y]=\mathbb{C}[f,g]$ が成りたつ.

(1) m または n は素数である.

(2) m または n が4に等しい.

(3) $m=2p$ (pは奇素数)で $m>n$ のとき.

証明. 簡単のため $m\geq n$ とする. 定理1, 2より, 何れの場合も n は m の約数になることがわかる. そうすると, 補

題1より　$f_m=\varepsilon g_n^{\frac{m}{n}}$　となる定数εが存在する。　$f_1=f-(\varepsilon^{\frac{m}{n}}g)^{\frac{m}{n}}$
は次数が$<m$で，$\partial(f_1,g)/\partial(x,y)\in\mathbb{C}^*$.　ゆえに　次数$m+n$に
関する帰納法が使える　ゆえに　$\mathbb{C}[x,y]=\mathbb{C}[f_1,g]=\mathbb{C}[f,g]$

注意　$f(x,y)$, $g(x,y)$は定理1と同様の仮定をみたすとするとき　M_dで次の命題を表わすことにする

M_d:　$\mathrm{Min}(m,n)>d$ なら $\mathrm{GCD}(m,n)>d$ である

M_dが任意のdについて成りたつことがKellerの問題が肯定的にとけることを意味することはみやすい。本論文ではM_1, M_2を証明したわけであるが　$d\geqq 3$をみたすdについてM_dを証明することが，このような方法で可能であるかどうかについては，著者はやゝ懐疑的である。

参考文献

[1]. O.H. Keller, Ganze Cremona-Transformationen, Monatshefte für Math. und Phys., 47(1939), 299-306.

[2] A. Magnus, On polynomial solution of a differential equation, Math. Scand. 3(1955), 255-260

[3]. Y. Nakai and K. Baba, A generalization of Magnus' Theorem, to appear.